ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat. (Μονάδες 7)

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η διακύμανση εκφράζεται με τις μονάδες μέτρησης της μεταβλητής. (Μον. 2)

β) Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$, με $f(A) \subseteq B$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in A$ και η g παραγωγίσιμη σε κάθε $f(x) \in B$, τότε η σύνθεσή τους $g o f$: $A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο A και ισχύει ότι: $(g o f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$. (Μον. 2)

γ) Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ και $f'(x)<0$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). (Μον. 2)

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$ με ℓ_1, $\ell_2 \in \mathbb{R}$ και $\ell_2 \neq 0$,

τότε: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$. (Μον. 2)

ε) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Τότε ισχύει $\int_\alpha^\alpha f(x)\,dx = 0$. (Μον. 2)

Α3. Για κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις να γράψετε στο τετράδιο σας την παράγουσα συνάρτησή της F. (Μον. 2)

α) $f(x) = 1, \quad x \in R$

β) $f(x) = x^\alpha$ με $\alpha \neq -1$ και $x > 0$ (Μον. 2)

γ) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in R$ (Μον. 2)

δ) $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, \ x \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}, \ \kappa \in Z$ (Μον. 2)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x}-1} & \alpha\nu\ x>1 \\ a\sqrt{x^2+3}\ \alpha\nu\ x\le 1\ , & \alpha\in\mathbb{R} \end{cases}$

Να υπολογίσετε:

α) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ (Μον 6)

β) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ (Μον 4)

γ) Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=1$ (Μον 5)

δ) Αν α= -1 να βρείτε την παράγωγο της f για x<1. (Μον 5)

ε) Για την παραπάνω τιμή της παραμέτρου να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$A=f(3)-2f^{'}(-1)-\sqrt{3}$ (Μον 5)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται ο επόμενος πίνακας κατανομής συχνοτήτων:

x_i	ν_i	$f_i\%$	N_ι	$F_i\%$
1				
2	α		β	
3				75
4	2	γ		
5				
Σύνολο				

Αν α το τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης $f(x)=-x^3-6x^2-9x+10,\ x\in\mathbb{R}$

β το τοπικό μέγιστο της f(x) και γ = $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{f'(x)+f''(x)-3(x-1)}{3x+18}$

α) Να βρείτε τις τιμές των α,β,γ. (Μον 10)
Για α=10 ,β=14 ,γ=5
β) Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα. (Μον 6)
γ) Να βρείτε την μέση τιμή (Μον 4)
δ) Να βρείτε την διακύμανση. (Μον 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{\lambda x}-\mu$ με $\lambda,\mu\in\mathbb{R},x\in\mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ισχύει ότι: $f''(x)=-4(f'(x)+f(x)+1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι μ=1 και λ=-2 (Μον 8)

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μον 5)

γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{f\left(\dfrac{x}{2}\right)}$ (Μον 5)

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=2xe^{x}$, $g(x)=2x$, όπου $x\in\mathbb{R}$, τον άξονα y'y και την ευθεία χ=2.
(Μον 7)