

Προτεινόμενα Θέματα 3
Μαθηματικά
Γ' ΕΠΑ.Λ.

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν $x_1, x_2, \dots, x_k$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , $k \leq n$:

- i) να ορίσετε τη σχετική συχνότητα f_i της τιμής $x_i, i = 1, \dots, k$.
- ii) αν επιπλέον $f_1, f_2, \dots, f_k$ οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες των τιμών της μεταβλητής, να αποδείξετε ότι $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$.

Μονάδες 8

A2. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής;

Μονάδες 4

A3. Να δώσετε τον ορισμό του εύρους R ενός δείγματος n παρατηρήσεων.

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ):

- i) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μιας ποσοτικής μεταβλητής.
- ii) Η διακύμανση είναι ένα μέτρο διασποράς που εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.
- iii) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
- iv) Αν υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ και είναι ίσα με $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ αντίστοιχα, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = l_1 + l_2$.

- v) Αν $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + ax - 2$, για την οποία ισχύει $f''(x) - f'(x) + x^2 = 5$.

B1. Να αποδείξετε ότι $a = -3$. **Μονάδες 10**

B2. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της f για $x = \sqrt{3}$. **Μονάδες 5**

B3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Γ

Οι απουσίες των μαθητών της Γ τάξης ενός ΕΠΑ.Λ. κατά το μήνα Μάρτιο έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους και εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα:

Απουσίες μαθητών	Κέντρο κλάσης x_i	Σχετική συχνότητα f_i	$x_i \cdot f_i$
[..... -)	4	0,1	
[..... - 7)			
[..... -)			
[..... -)		0,3	
Σύνολο			

Γ1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος c των κλάσεων ισούται με 2. **Μονάδες 6**

Αν επιπλέον δίνεται ότι η σχετική συχνότητα της 3^{ης} κλάσης f_3 είναι διπλάσια από τη σχετική συχνότητα της 2^{ης} κλάσης f_2 , τότε:

Γ2. Να δείξετε ότι $f_2 = 0,2$. **Μονάδες 5**

Γ3. Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα σχετικών συχνοτήτων στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τα κενά, αφού υπολογίσετε τις αντίστοιχες τιμές.

Μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{X}$ (Μονάδες 3) και τη διάμεσο δ (Μονάδες 6) των παρατηρήσεων.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Οι παρατηρήσεις $t_1, t_2, \dots, t_n$ ενός δείγματος μεγέθους n , που ακολουθεί την κανονική κατανομή, έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s .

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}, & \text{αν } x \in (0, 4) \cup (4, +\infty) \\ 4s, & \text{αν } x = 4 \end{cases}$$

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και $\bar{x} = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ τότε:

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\bar{x} = 3$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι $s = \frac{1}{2}$

Μονάδες 8

Δ3. Να εξετάσετε το δείγμα ως προς την ομοιογένεια.

Μονάδες 5

Δ4. Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι 136 παρατηρήσεις βρίσκονται στο διάστημα από 2,5 έως 3,5, να υπολογίσετε:

i. το μέγεθος n του δείγματος (Μονάδες 4)

ii. το πλήθος των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα $(3, 4)$. (Μονάδες 3)

Μονάδες 7

Επιμέλεια Θεμάτων
Φανή Αθανασοπούλου