Προτεινόμενες Απαντήσεις
Μαθηματικά - Γ' ΕΠΑΛ
08 Ιουνίου 2017
Ημερησίων & Εσπερινών Επαγγελματικών Λυκείων

Θέμα Α

Α1. Θεωρούμε την συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= (f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x)) \\ &= (f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x)) \end{aligned}$$

και για $h \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{(f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x))}{h} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

Άρα

$$\boxed{[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)}$$

Α2. **α)** Λάθος

β) Σωστό

γ) Σωστό

Α3. **α)** $(x^{\rho})' = \rho \cdot x^{\rho - 1}$, όπου ρ ρητός αριθμός.

β) $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$

γ) $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} w_i} = \dfrac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots + x_{\nu} w_{\nu}}{w_1 + w_2 + \cdots + w_{\nu}}$

Θέμα Β

Β1.

$$\kappa = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+2) = 1+2=3$$

Με Horner στο x^2+x-2 έχουμε

1	1	−2	ρ = 1
////	1	2	
1	2	0	

άρα $x^2+x-2=(x-1)(x-2)$

Β2. Για $\kappa=3$ οι βαθμοί είναι

$$4, 3, 5, 6, 7, 4, 6, 5, 6, 4$$

Η μέση τιμή δίνεται από

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu} = \frac{4+3+5+6+7+4+6+5+6+4}{10} = \frac{50}{10} = 5$$

Β3. Η διακύμανση είναι

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(\overline{x}-t_i)^2\cdot \nu_i}{\nu} \\ &= \frac{(5-3)^2+3\cdot(5-4)^2+2\cdot(5-5)^2+3\cdot(5-6)^2+(5-7)^2}{10} \\ &= \frac{4+3\cdot 1+2\cdot 0+3\cdot 1+4}{10} \\ &= \frac{4+3+0+3+4}{10} \\ &= \frac{14}{10} \\ s^2 &= 1,4 \end{aligned}$$

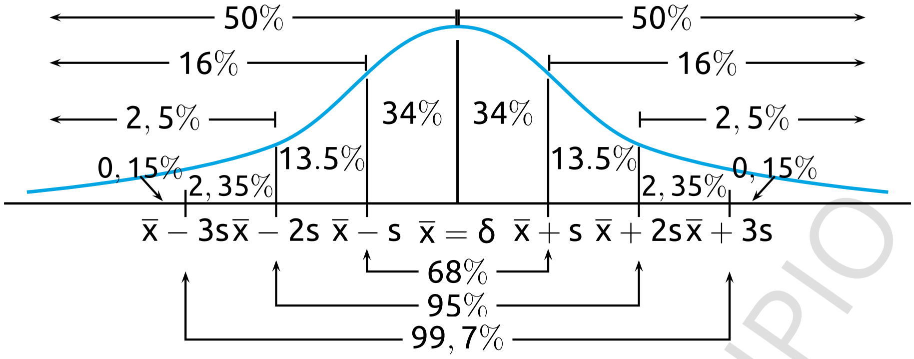
Β4. Η τυπική απόκλιση είναι $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{1,4}\approx 1,18$.

Ο συντελεστής μεταβολής είναι

$$CV\% = \frac{s}{\overline{x}}\cdot 100 = \frac{1,18}{5}\cdot 100 = \frac{118}{5} = 23,6\% \text{ ή } CV = 0,236$$

(όχι ομοιογενές δείγμα)

Θέμα Γ



Γ1. Σύμφωνα με το σχήμα.
Το 50% των εργαζομένων έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 40 άρα $\bar{x} = \delta = 40$.

Γ2. Το 16% των εργαζομένων έχουν ηλικία μικρότερη των 35 άρα $\bar{x} - s = 35$.
άρα

$$\begin{aligned} \bar{x} - s &= 35 \\ 40 - s &= 35 \\ 40 - 35 &= s \\ s &= 5 \end{aligned}$$

Γ3. Ηλικία μεγαλύτερη των 45 ετών έχουν το 16% άρα

$$\frac{16}{100} \cdot 400 = 64 \text{ εργαζόμενοι}$$

Γ4. Ηλικία από 30 ως 45 ετών έχουν το 81,5% άρα

$$\frac{81,5}{100} \cdot 400 = 326 \text{ εργαζόμενοι}$$

Θέμα Δ

Δ1. Η παράγωγος της f είναι

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1\right)' \\ f'(x) &= -\frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 2 \cdot 2x - 3 \cdot 1 + 0 \\ f'(x) &= -x^2 + 4x - 3 \end{aligned}$$

Μηδενίζω την παράγωγο

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -x^2 + 4x - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Είναι $\alpha = -1$, $\beta = 4$ και $\gamma = -3$ άρα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2 - 4(-1)(-3) = 16 - 12 = 4 > 0$$

έχει δύο πραγματικές ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-4\pm\sqrt{4}}{2(-1)}=\frac{-4\pm 2}{-2}$$

οπότε

$$x_1=\frac{-4-2}{-2}=\frac{-6}{-2}=3\Rightarrow x_1=3$$
$$x_2=\frac{-4+2}{-2}=\frac{-2}{-2}=1\Rightarrow x_2=1$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	τ.ε.	$\nearrow$	τ.μ.	$\searrow$	

Η $f(x)$ είναι γνήσια φθίνουσα στα $(-\infty,1)$ και $(3,+\infty)$.
Η $f(x)$ είναι γνήσια αύξουσα στα $(1,3)$

Δ2. Η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $x_0=1$ με τιμή $f(1)$ με
$f(1)=-\frac{1}{3}\cdot 1^3+2\cdot 1^2-3\cdot 1+1=-\frac{1}{3}+2-3+1=-\frac{1}{3}$
Η f έχει τοπικό μέγιστο στο $x_1=3$ με τιμή $f(3)$ με
$f(3)=-\frac{1}{3}\cdot 3^3+2\cdot 3^2-3\cdot 3+1=-\frac{1}{3}\cdot 27+2\cdot 9-3\cdot 3+1=-9+18-9+1=1$

Δ3. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο (x_0,y_0) είναι $y=\lambda x+\beta$.
$\lambda=f'(x_0)$
και επειδή η εφαπτομένη ε είναι παράλληλη στην ε_1 $y=x+2017$ που έχει $\lambda_1=1$
άρα έχουν $\lambda_1=\lambda=1$ οπότε
$f'(x_0)=1$
$-x_0^2+4x_0-3=1$
$-x_0^2+4x_0-3-1=0$
$-x_0^2+4x_0-4=0$
$-(x_0^2-4x_0+4)=0$
$-(x_0-2)^2=0$
$x_0-2=0$
$x_0=2$

Το $y_0=f(x_0)=f(2)=-\frac{1}{3}\cdot 2^3+2\cdot 2^2-3\cdot 2+1=-\frac{1}{3}\cdot 8+2\cdot 4-3\cdot 2+1=$
$-\frac{8}{3}+8-6+1=-\frac{8}{3}+3=-\frac{8}{3}+\frac{9}{3}=\frac{1}{3}$

Το ζητούμενο σημείο επαφής είναι $\left(2,\frac{1}{3}\right)$.

Δ4. Η δεύτερη παράγωγος της $f(x)$ είναι

$$f''(x) = \left(-x^2 + 4x - 3\right)'$$
$$f''(x) = -2x + 4 \cdot 1$$
$$f''(x) = -2x + 4$$

Οι τεταγμένες y_i προκύπτουν από τον τύπο $y_i = -2x_i + 4$
οπότε για την τυπική απόκλιση των y_i έχουμε

$$s_y = |-2| \cdot s_x = 2 \cdot 3 = 6$$

Το θέμα της θεωρίας για πρώτη φορά δεν περιείχε ορισμό.

Το δεύτερο θέμα της στατιστικής ήταν εύκολο και με σχετικά εύκολες πράξεις. Ίσως να δυσκόλεψε όσους μαθητές ήταν περισσότερο εξοικειωμένοι με πινάκα.

Η κανονική κατανομή είναι ένα θέμα που μπαίνει για πρώτη φορά, ωστόσο κρίνεται αναμενόμενη με βάση το νέο βιβλίο των μαθηματικών και μπορεί δυσκόλεψε όσους μαθητές δεν την έχουν κατανοήσει.

Το Δ4 απαιτούσε την χρήση εφαρμογής του βιβλίου και τη συνδυαστική ικανότητα του υποψηφίου για αυτό και ήταν το ερώτημα που δυσκόλεψε την πλειοψηφία των μαθητών.

Επιμέλεια θεμάτων : Κωνσταντίνος Κάππος & Πέτρος Χέρας