Προτεινόμενες απαντήσεις πανελληνίων θεμάτων Μαθηματικά 1

Ημερησίων επαγγελματικών λυκείων (Ομάδα Α)

Θέμα Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 212.

Α2

α. **Λ**

β. **Σ**

γ. **Λ**

δ. **Λ**

ε. **Σ**

Α3. α) $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x}\, dx = [\ln x]_{\alpha}^{\beta} = \ln\beta - \ln\alpha$ με $\beta > \alpha > 0$

β) $(c)' = 0$, αν c σταθερά

γ) $\bar{x} = \frac{x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + \cdots + x_\kappa\nu_\kappa}{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i\nu_i}{\nu}$

Θέμα Β

Χρόνος $[\alpha, \beta)$	Κέντρο K_i	Συχνότητα ν_i	Αθρ. Συχν N_i	$K_i \cdot \nu_i$	$\bar{x} - x_i$	$(\bar{x} - x_i)^2$	$(\bar{x} - x_i)^2 \cdot \nu_i$
$[5, 15)$	10	20	20	200	10	100	2000
$[15, 25)$	20	14	34	280	0	0	0
$[25, 35)$	30	12	46	360	-10	100	1200
$[35, 45)$	40	4	50	160	-20	400	1600
Σύνολα	—	$\nu = 50$	—	1000	—	—	4800

Β1. Ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξης:

Το κέντρο κάθε κλάσης από τον τύπο $K_i = \frac{\alpha + \beta}{2}$ με $i = 1, 2, 3, 4$

$$K_1 = \frac{5+15}{2} = \frac{20}{2} = 10 \qquad K_3 = \frac{25+35}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

$$K_2 = \frac{15+25}{2} = \frac{40}{2} = 20 \qquad K_4 = \frac{35+45}{2} = \frac{80}{2} = 40$$

Ισχύει $N_1 = \nu_1 = 20$.
$N_2 = N_1 + \nu_2 \Leftrightarrow \nu_2 = N_2 - N_1 = 34 - 20 = 14$
$N_3 = N_2 + \nu_3 = 34 + 12 = 46$
$N_4 = \nu = 50$
οπότε $N_4 = N_3 + \nu_4 \Leftrightarrow \nu_4 = N_4 - N_3 = 50 - 46 = 4$

Β2. Η μέση τιμή δίνεται από τον τύπο

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i}{\nu} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{1000}{50}$$
$$\Leftrightarrow \bar{x} = 20$$

Β3. Για να υπολογίσουμε την διακύμανση προσθέτουμε βοηθητικές στήλες στον πίνακα.
Η διακύμανση είναι

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4} (\bar{x} - x_i)^2 \cdot \nu_i}{\nu} \Leftrightarrow s^2 = \frac{4800}{50}$$
$$\Leftrightarrow s^2 = 96$$

Η τυπική απόκλιση είναι

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{96} \approx 10$$

Β4. Ο συντελεστής μεταβολής είναι

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{10}{20} \cdot 100 = 50\%$$

Είναι $CV > 10\%$ επομένως το δείγμα είναι **μη** ομοιογενές (ανομοιογενές)

Θέμα Γ

Γ1. Είναι

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (4x + 4e^{x-2}) = 4 \cdot 2 + 4 \cdot e^{2-2} = 8 + 4 = 12$$

Γ2. Είναι

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(\frac{x^3 - 8}{\lambda x - 2\lambda} \right) = \lim_{x \to 2^+} \left(\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{\lambda(x-2)} \right) =$$
$$= \frac{2^2 + 2 \cdot 2 + 4}{\lambda} = \frac{12}{\lambda}$$

Γ3. Για να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ πρέπει

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$$
$$12 = \frac{12}{\lambda}$$
$$\lambda = 1$$

Γ4. Για υπολογίσουμε το ζητούμενο ολοκλήρωμα, θα πάρουμε τον δεύτερο τυπο

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (4x + 4e^{x-2})\,dx = \left[4 \cdot \frac{x^2}{2} + 4e^{x-2}\right]_1^2 = \left[2x^2 + 4e^{x-2}\right]_1^2 =$$

$$= 2\cdot 2^2 + 4e^{2-2} - \left(2\cdot 1^2 + 4e^{1-2}\right) = 8 + 4 - 2 - 4e^{-1} = 10 - \frac{4}{e} = \frac{10e-4}{e}$$

Θέμα Δ

Δ1. Ρυθμός μεταβολής είναι παράγωγος της $B(t)$ οπότε

$$B'(t) = \left(-\frac{t^3}{3} + 2t^2 + 12t + 15\right)'$$
$$B'(t) = -\frac{3t^2}{3} + 2\cdot 2t + 12\cdot 1 + 0$$
$$B'(t) = -t^2 + 4t + 12 \qquad 0 < t < 10$$

Δ2. Χρεάζεται να μελετήσουμε την $B(t)$ ως προς τα ακρότατα για $0 \le t \le 10$.
Από Δ1 έχουμε την παράγωγο, οπότε

$$B'(t) = 0 \Leftrightarrow -t^2 + 4t + 12 = 0$$

Είναι $\alpha = -1$, $\beta = 4$ και $\gamma = 12$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2\cdot(-1)\cdot 12 = 16 + 48 = 64 > 0$$

οπότε

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2\cdot(-1)} = \frac{-4 \pm 8}{-2}$$

άρα οι ρίζες είναι

$$x_1 = \frac{-4-8}{-2} = \frac{-12}{-2} = 6 \quad \text{και} \quad x_1 = \frac{-4+8}{-2} = \frac{4}{-2} = -2$$

Ο πίνακας προσήμων της $B'(t)$ είναι

t	0	6	10
$B'(t)$	$+$		$-$
$B(t)$	$\nearrow$	τ.μ.	$\searrow$

Για $t = 6$ η $B(t)$ παρουσιάζει μέγιστο με τιμή $B(6)$.

Δ3. Από το Δ2 η $B(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $t \in [6, 10]$ οπότε

$$6 \le t \le 9 \Leftrightarrow B(9) \le B(t) \le B(6) \Leftrightarrow B(6) \ge B(t) \ge B(9)$$

Δ4. Χρειάζεται να μελετήσουμε την $B'(t)$ ως προς τα ακρότατα Η παράγωγος της $B'(t)$ είναι

$$B''(t) = \left(-t^2 + 4t + 12\right)'$$
$$B''(t) = -2t + 4$$

Μηδενίζω την $B''(t)$

$$B''(t) = 0 \Leftrightarrow -2t + 4 = 0 \Leftrightarrow 4 = 2t \Leftrightarrow t = 2$$

Ο πίνακας προσήμων της $B''(t)$ είναι

t	0	2	10
$B''(t)$	+		−
$B'(t)$	$\nearrow$	τ.μ.	$\searrow$

Επομένως, από τον προηγούμενο πίνακα, ο ρυθμός μεταβολής του βάρους $B(t)$ δηλαδή η $B'(t)$ γίνεται μέγιστος στο $t = 2$.

Τα θέματα ήταν αναμενόμενα.

Τα θέματα δεν είχαν ιδιαίτερη δυσκολία αλλά σε κάποια σημεία απαιτούνταν ιδιαίτερη προσοχή των υποψηφίων. Ειδικότερα το Δ3 απαιτούσε και πλήρη κατοχή της θεωρίας.

Επιμέλεια θεμάτων : Ευαγγελία Ανυφαντή - Πέτρος Χέρας