Προτεινόμενες Απαντήσεις στα Μαθηματικά 1
Γ' ΕΠΑΛ - 19 Μαΐου 2016

Ημερησίων Επαγγελματικών Λυκείων

Με το νέο σύστημα

Θέμα 1

Α1. (Σχολικό Βιβλίο - σελίδα 28)

Α2. (Σχολικό Βιβλίο - σελίδα 87)

Α3. **α)** Σωστό

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Σωστό

Θέμα 2

Αρ.Καρτών x_i	**Αρ. Υπαλλήλων** ν_i	**Αθρ. Συχν.** N_i	**Σχετ.Συχν. %** $f_i\%$	$x_i \cdot \nu_i$
0	5	5	25	0
1	4	9	20	4
2	2	11	10	4
3	4	15	20	12
4	5	20	25	20
Σύνολα	$\nu = 20$		100	

Β1. Ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξης:

$N_1 = \nu_1 = 5$ και $\nu_5 = \nu_1 = 5$ από υπόθεση.

$\nu_2 = N_2 - N_1 = 9 - 5 = 4$

$f_1 = \dfrac{\nu_1}{\nu} = \dfrac{5}{20} = 0,25$ δηλαδή $f_1 = 25\%$

$f_2 = \dfrac{\nu_2}{\nu} = \dfrac{4}{20} = 0,20$ δηλαδή $f_2 = 20\%$

Αφού $\nu_5 = \nu_1$ και $f_5\% = f_1\% = 25$

$f_4\% = 100 - f_1\% - f_2\% - f_3\% - f_5\% = 20\%$

Β2. Η μέση τιμή δίνεται από τον τύπο

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i \nu_i}{\nu} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{40}{2} \Leftrightarrow \bar{x} = 2$$

B3. Ο αριθμός υπαλλήλων που έχουν το πολύ 3 κάρτες είναι

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = N_4 = 15$$

B4. Το ποσοστό των υπαλλήλων με τουλάχιστον 2 κάρτες είναι

$$f_3\% + f_4\% + f_5\% = 55\%$$

Θέμα 3

Γ1. Είναι

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\right)' \\
f'(x) &= \frac{(x)'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} + 0 \\
f'(x) &= \frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\
f'(x) &= \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} \\
f'(x) &= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}$$

Γ2. Έχουμε

$$\begin{aligned}
f'(-1) &= \frac{1-(-1)^2}{((-1)^2+1)^2} = \frac{1-1}{(1+1)^2} = \frac{0}{4} = 0 \\
f'(1) &= \frac{1-1^2}{(1^2+1)^2} = \frac{1-1}{(1+1)^2} = \frac{0}{4} = 0
\end{aligned}$$

Γ3. Μηδενίζω την παράγωγο

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$$

Ο πίνακας προσήμων της $f'(x)$ είναι

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	τ.ε.	$\nearrow$	τ.μ.	$\searrow$	

Μονοτονία.
Η f είναι γνήσια φθίνουσα στα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$.
Η f είναι γνήσια αύξουσα στο $[-1,1]$.

Ακρότατα.
Η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $x_0=-1$ με τιμή $f(-1)=0$.
Η f έχει τοπικό μέγιστο στο $x_1=1$ με τιμή $f(1)=1$.

Γ4. Η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ οπότε

$$2015<2016 \overset{f\searrow}{\Longleftrightarrow} f(2015)>f(2016)$$

Θέμα 4

Δ1. Είναι

$$\alpha=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x-2)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x-2)=4-2=2\Leftrightarrow \alpha=2$$

Δ2. Είναι $f'(x)=\left(x^2+2x-3\right)'\Leftrightarrow f'(x)=2x+2$.

Δ3. Η εφαπτόμενη της f στο σημείο επαφής $(x_0,f(x_0))$ δηλαδή $(-2,f(-2))$ είναι

$$y=\lambda x+\beta$$

Είναι $\lambda=f'(x_0)=f'(-2)=2(-2)+2=-4+2=-2$ και
$y=f(x_0)=f(-2)=(-2)^2+2(-2)-3=4-4-3=-3$.
Η εφαπτομένη διέρχεται και από το σημείο επαφής, οπότε επαληθεύει την $y=\lambda x+\beta$ δηλαδή

$$\begin{aligned} y=\lambda x+\beta &\Leftrightarrow -3=-2\cdot(-2)+\beta\\ &\Leftrightarrow -3=4+\beta\\ &\Leftrightarrow -3-4=\beta\\ &\Leftrightarrow -7=\beta \end{aligned}$$

Άρα η εφαπτομένη είναι $y=-2x-7$.

(β' Τρόπος)
Η εφαπτόμενη της f στο σημείο επαφής $(x_0,f(x_0))$ δηλαδή $(-2,f(-2))$ είναι

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

Είναι $\lambda=f'(x_0)=f'(-2)=2(-2)+2=-4+2=-2$ και
$f(x_0)=f(-2)=(-2)^2+2(-2)-3=4-4-3=-3$.
Άρα $y-(-3)=-2\,(x-(-2))\Leftrightarrow y+3=-2x+4\Leftrightarrow y=-2x-7$

Δ4. Τα νέα σημεία y_i, $i=1,\ldots,5$ δίνονται από τον τύπο

$$y_i=-2\cdot x_i-7$$

Επομένως η νέα μέση τιμή θα είναι $\bar{y}=-2\cdot\bar{x}-7=-2\cdot 2-7=-4-7=-11$.

$$\bar{y}=-11$$

Τα φετινά θέματα ήταν ποιοτικά και δυσκολότερα από τα περσινά. Απαιτούσαν γνώση της θεωρίας, συνδυαστική ικανότητα και η διαβάθμιση της δυσκολίας των ερωτημάτων ήταν ικανοποιητική.

Το Δ4 αντιμετωπίζονταν από πολύ καλά προετοιμασμένους υποψηφίους.

Επιμέλεια θεμάτων : Ευαγγελία Ανυφαντή & Πέτρος Χέρας