ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ) Γ' ΕΠΑ.Λ.
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. **α.** Στην τιμή x_i αντιστοιχίζεται η (απόλυτη) ***συχνότητα*** ν_i, δηλαδή ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής *X* στο σύνολο των παρατηρήσεων.

β. Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα ν_i με το μέγεθος ν του δείγματος, προκύπτει η ***σχετική συχνότητα*** f_i της τιμής x_i, δηλαδή

$$f_i = \frac{\nu_i}{\nu}, \qquad i = 1,2,\ldots,\kappa.$$

γ.

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = \frac{\nu_1}{\nu} + \frac{\nu_2}{\nu} + \ldots + \frac{\nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1.$$

Α2. Η *f* είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\boldsymbol{x_0}$ του πεδίου ορισμού της αν το όριο

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, συμβολίζεται με $f'(x_0)$.

Α3. α. Σωστό

β. Λάθος

γ. Λάθος

δ. Σωστό

ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αφού η διάμεσος είναι $\delta = 15$ και το πλήθος $\nu = 5$ είναι περιττός άρα η διάμεσος θα είναι η μεσαία παρατήρηση t_3 , άρα θα είναι μια από τις παρατηρήσεις του δείγματος οπότε

$$\delta = 4\alpha - 1$$

$$15 = 4\alpha - 1$$

$$15 + 1 = 4\alpha$$

$$16 = 4\alpha$$

$$\frac{16}{4} = \frac{4\alpha}{4}$$

$$\alpha = 4$$

Β2. Ο αριθμοί σε αύξουσα σειρά είναι 12, 14, 15, 16, 18.

Η μέση τιμή είναι

$$\bar{x} = \frac{\sum t_i}{\nu} = \frac{12+14+15+16+18}{5} = \frac{75}{5} = 15 \quad \text{άρα } \bar{x} = 15$$

Η διακύμανση ή διασπορά είναι

$$s^2 = \frac{\sum (\bar{x} - t_i)^2}{\nu}$$

$$s^2 = \frac{(15-12)^2+(15-14)^2+(15-15)^2+(15-16)^2+(15-18)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{3^2+1^2+0^2+(-1)^2+(-3)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{20}{5}$$

$s^2 = 4$

Β3. Η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4}$ άρα s = 2

Εξετάζουμε τον συντελεστή μεταβολής

$CV\% = \frac{s}{|\bar{x}|}100 = \frac{2}{15}100 = \frac{200}{15} = 13,33\% > 10\%$, άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

Β4. Οι νέες παρατηρήσεις προκύπτουν από τον τύπο $y_i = -2\, x_i + 5$ άρα

$\bar{y} = -2\,x + 5 = -2 \cdot 15 + 5 = -30 + 5 = -25$ οπότε $\bar{y} = -25$

$s_y = |-2| \cdot s_x = 2 \cdot 2 = 4$ οπότε $s_y = 4$

Ο νέος συντελεστής μεταβολής είναι $CV_y\% = \frac{s_y}{|\bar{y}|}100 = \frac{4}{25}100 = 16\%$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο Μ είναι παράλληλη στον άξονα x'x, άρα ο συντελεστής διεύθυνσης λ θα ισούται με 0.

Έχουμε $f'(x) = 6x^2 - 6\kappa x$

Άρα

$$\lambda = 0 \Leftrightarrow$$
$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$6 \cdot 1^2 - 6\kappa \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$6 - 6\kappa = 0 \Leftrightarrow$$
$$\kappa = 1$$

Γ2. Για $\kappa = 1$, έχουμε $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

Ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ είναι η $f'(x) = 6x^2 - 6x$.

Θα μελετήσουμε την $f'(x)$ ως προς τα ακρότατα.

$$f''(x) = 12x - 6$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$12x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f'	$\searrow$		$\nearrow$

Η f' έχει ελάχιστη τιμή για $x = \frac{1}{2}$, επομένως ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος για $x = \frac{1}{2}$.

Γ3. Η εξίσωση της εφαπτομένης της f' στο σημείο $(-1, f'(-1))$ είναι $y = \lambda_\varepsilon x + \beta$.

$$\lambda_\varepsilon = f''(-1) = 12(-1) - 6 = -18$$

$$y = f'(-1) = 6(-1)^2 - 6(-1) = 12$$

Το $(-1, 12)$ ανήκει στην $y = \lambda_\varepsilon x + \beta$ άρα

$$12 = -18 \cdot (-1) + \beta \Leftrightarrow$$
$$\beta = -6$$

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση είναι η $y = -18x - 6$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+4}}\cdot(x^2+4)'=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

Δ2. Θα μελετήσουμε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

$f'(x)=0\Leftrightarrow$

$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}=0\Leftrightarrow$

$x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	↘		↗

Μονοτονία: Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Ακρότατα: Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x = 0, την τιμή $f(0)=\sqrt{0^2+4}+2018=2020$.

Δ3.

$$\lim_{x\to0}\frac{(x^2+4)f'(x)-2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(x^2+4)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}-2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x\left(\dfrac{(x^2+4)}{\sqrt{x^2+4}}-2\right)}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\left(\dfrac{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}^{\,2}}-2\right)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\dfrac{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}{x^2+4}-2\right)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+4}^{\,2}-2^2}{x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}+2}=\frac{0}{4}=0$$

<u>ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΘΕΜΑΤΩΝ</u>

ΘΕΜΑ Α

Θέμα θεωρίας χωρίς ιδιαίτερες εκπλήξεις.

ΘΕΜΑ Β

Εξετάζονται βασικοί τύποι και εφαρμογές της Στατιστικής. Το Β1 απαιτεί προσοχή στην αιτιολόγηση και το Β4 απαιτεί προσοχή στην εφαρμογή του τύπου λόγω του αρνητικού συντελεστή.

ΘΕΜΑ Γ

Εξετάζονται βασικές εφαρμογές της ανάλυσης, με κύριο σημείο δυσκολίας το γεγονός ότι ζητείται η μελέτη της παραγώγου.

ΘΕΜΑ Δ

Ενδιαφέρον θέμα ανάλυσης με παράγωγο σύνθετης συνάρτησης και απαιτητικό όριο στο Δ3, που απαιτεί ουσιαστική και εις βάθος κατανόηση της ύλης.

ΓΕΝΙΚΑ

Τα θέματα κρίνονται πιο απαιτητικά σε σχέση με τα θέματα των προηγούμενων ετών.
Πρόκειται για θέματα διαβαθμισμένης δυσκολίας, με περισσότερη έμφαση στο κεφάλαιο των συναρτήσεων.
Στο «Άριστα» θα μπορούσε να οδηγηθεί **μόνο ο άρτια προετοιμασμένος** υποψήφιος.
Στο φροντιστήριό μας θέματα ανάλογης δυσκολίας και φιλοσοφίας **είχαν υπερτονιστεί** τόσο κατά τη διδασκαλία, όσο και στη διεξαγωγή των διαγωνισμάτων.

<u>Επιμέλεια</u>
Φανή Αθανασοπούλου
Κωνσταντίνος Κάππος
Πέτρος Χέρας