ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
8 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ) Γ’ ΕΠΑ.Λ.
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, Σχολικό Βιβλίο σελ.28

Α2. **α.** Θεωρία, Σχολικό Βιβλίο σελ.59

β. Θεωρία, Σχολικό Βιβλίο σελ.59

Α3. α. Λάθος

β. Σωστό

γ. Λάθος

δ. Λάθος

ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4}$ άρα s = 2

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \Leftrightarrow \frac{20}{100} = \frac{2}{\bar{x}} \Leftrightarrow 20\bar{x} = 200 \Leftrightarrow \bar{x} = 10$$

Β2. $\bar{x} = \frac{\sum t_i}{\nu} \Leftrightarrow 10 = \frac{11 + 7 + \kappa + 13 + 11 + 10}{6} \Leftrightarrow 60 = 52 + \kappa \Leftrightarrow \kappa = 8$

Β3. Ο αριθμοί σε αύξουσα σειρά είναι 7, 8, 10, 11, 11, 13.

ν=6, άρτιος, άρα η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων

$$\delta = \frac{10 + 11}{2} = 10{,}5$$

Το εύρος είναι

R = μεγαλύτερη παρατήρηση - μικρότερη παρατήρηση = 13 - 7 = 6

Β4. Οι νέες παρατηρήσεις προκύπτουν από τον τύπο $y_i = x_i - 2$ άρα

$\bar{y} = \bar{x} - 2 = 10 - 2 = 8$

$s_y = s_x = 2$

Ο νέος συντελεστής μεταβολής είναι $CV_y = \dfrac{s_y}{|\bar{y}|} = \dfrac{2}{8} = 0,25 = 25\%$

Επειδή $CV > 10\%$, το δείγμα <u>δεν</u> είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2-2x+10}} \cdot (x^2-2x+10)' = \dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+10}} = \dfrac{2(x-1)}{2\sqrt{x^2-2x+10}}$

$$f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}$$

Γ2. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}} = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Ο πίνακας μονοτονίας της f είναι:

x	$-\infty$ 1 $+\infty$	
$f'(x)$	$-$ 0	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$

Μονοτονία:

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Αφού η f εμφανίζει ελάχιστο για x = 1, ισχύει $f(x) \ge f(1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$f(1) = \sqrt{1^2 - 2\cdot 1 + 10} = \sqrt{9} = 3$

Άρα $f(x) \ge 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Γ3. Η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $(5, f(5))$ είναι $y = \lambda x + \beta$.

$y = f(5) = \sqrt{5^2 - 2\cdot 5 + 10} = \sqrt{25} = 5$

$\lambda = f'(5) = \dfrac{5-1}{\sqrt{5^2 - 2\cdot 5 + 10}} = \dfrac{4}{5}$

Το $M(5,5)$ ανήκει στην $y = \lambda x + \beta$ άρα

$5=\frac{4}{5}\cdot 5+\beta \Leftrightarrow \beta =1$

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση είναι η $y=\frac{4}{5}x+1$.

Γ4. Για το σημείο τομής της εφαπτομένης $y=\frac{4}{5}x+1$ με τον άξονα x'x ισχύει y=0

$0=\frac{4}{5}x+1\Leftrightarrow \frac{4}{5}x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{5}{4}$.

Άρα οι συντεταγμένες του σημείου Α είναι $A\left(-\frac{5}{4},0\right)$

Για το σημείο τομής της εφαπτομένης $y=\frac{4}{5}x+1$ με τον άξονα y'y ισχύει x=0

$y=\frac{4}{5}\cdot 0+1=1$

Άρα οι συντεταγμένες του σημείου Β είναι $B(0,1)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για λ = 3 η συνάρτηση είναι $f(x)=x^3-3x^2+3x$

$f'(x)=3x^2-6x+3$

Θα μελετήσουμε την f ως προς τη μονοτονία.

$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x+3=0\Leftrightarrow 3(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
f	$\nearrow$		$\nearrow$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

Αφού $\frac{3}{8}<\frac{5}{6}$ και η f είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f\left(\frac{3}{8}\right)<f\left(\frac{5}{6}\right)$.

Δ2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f'(x)}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-6x+3}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)}=$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3(x^2-2x+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)x(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)^2(\sqrt{x}+1)}{(x-1)x(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{3(\sqrt{x}+1)}{x}=\frac{3(\sqrt{1}+1)}{1}=6$$

Δ3. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης όταν η παράγωγος $f'(x)=3x^2-6x+3$ γίνεται ελάχιστη.

Θα μελετήσουμε την παράγωγο ως προς τα ακρότατα.

$f''(x)=6x-6$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x-6=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f'	$\searrow$		$\nearrow$

Άρα η f' παρουσιάζει ελάχιστο για x = 1.

$f(1)=1^3-3\cdot 1^2+3\cdot 1=1$

Επομένως το ζητούμενο σημείο της γραφικής παράστασης της f είναι το $A(1,1)$.

Δ4. $f(x)=x^3-3x^2+\lambda x$

$f'(x)=3x^2-6x+\lambda$

Η παράγωγός της f' είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=36-12\lambda$

Επομένως, για να μην παρουσιάζει ακρότατα η συνάρτηση f, θα πρέπει $\Delta\le 0$

$\Delta\le 0 \Leftrightarrow 36-12\lambda\le 0 \Leftrightarrow \lambda\ge 3$.

Άρα η μικρότερη τιμή του λ για την οποία η f δεν παρουσιάζει ακρότατα είναι λ = 3.

ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Θέμα θεωρίας χωρίς ιδιαίτερες εκπλήξεις.

ΘΕΜΑ Β

Εξετάζονται βασικοί τύποι και εφαρμογές της Στατιστικής, χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία.

ΘΕΜΑ Γ

Εξετάζονται βασικές εφαρμογές της Ανάλυσης.

ΘΕΜΑ Δ

Πιο απαιτητικό θέμα ανάλυσης με ενδιαφέροντα ερωτήματα και αυξημένη δυσκολία στο τελευταίο ερώτημα Δ4.

ΓΕΝΙΚΑ

Τα θέματα συνολικά κρίνονται λιγότερα απαιτητικά σε σχέση με τα περσινά θέματα. Μεγαλύτερη έμφαση δίνεται και φέτος στο κεφάλαιο των συναρτήσεων.

Τα θέματα Β και Γ κρίνονται ως θέματα μικρής έως μέτριας δυσκολίας, ενώ το θέμα Δ αποτελείται από ερωτήματα μέτριας και μεγαλύτερης δυσκολίας.

Ωστόσο, στο «Άριστα» θα μπορούσε να οδηγηθεί **μόνο ο άρτια προετοιμασμένος** υποψήφιος.

Στο φροντιστήριό μας θέματα ανάλογης δυσκολίας και φιλοσοφίας **είχαν υπερτονιστεί** τόσο κατά τη διδασκαλία, όσο και στη διεξαγωγή των διαγωνισμάτων.

Επιμέλεια
Φανή Αθανασοπούλου
Κωνσταντίνος Κάππος