

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
18 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ) Γ' ΕΠΑ.Λ.
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Θεωρία, Σχολικό Βιβλίο σελ.16
- A2.** α. Λάθος
β. Σωστό
γ. Λάθος
- A3.** α. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
β. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
γ. $(\sin x)' = -\eta\mu x$
- A4.** Θεωρία, Σχολικό Βιβλίο σελ.28-29

ΘΕΜΑ Β

B1.

x_i	n_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
0	20	40	20	40
1	15	30	35	70
2	10	20	45	90
3	5	10	50	100
Σύνολο	50	100		

Αφού το 40% των μαθητών δεν διάβασε κανένα βιβλίο, $f_1\% = F_1\% = 40$.

$$f_2\% = F_2\% - F_1\% = 30$$

$$f_3\% = F_3\% - F_2\% = 20$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} \Leftrightarrow \frac{20}{100} = \frac{10}{v} \Leftrightarrow v = 50$$

$$v_1 = f_1 \cdot v = 0,40 \cdot 50 = 20$$

$$v_2 = f_2 \cdot v = 15$$

$$v_4 = f_4 \cdot v = 5$$

$$N_1 = v_1 = 20$$

$$N_2 = N_1 + v_2 = 35$$

$$N_3 = N_2 + v_3 = 45$$

$$N_4 = v = 50$$

B2. $f_4\% = 10$, άρα τρία βιβλία έχει διαβάσει το 10% των μαθητών.

B3. $v_2 + v_3 + v_4 = 30$, άρα τουλάχιστον 1 βιβλίο έχουν διαβάσει 30 μαθητές.

B4. $F_3\% = 90$, άρα το πολύ δύο βιβλία έχει διαβάσει το 90%.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(-1, -2)$ ισχύει

$$f(-1) = -2$$

$$(-1)^3 - \lambda(-1)^2 + 2 = -2$$

$$-1 - \lambda + 2 = -2$$

$$-\lambda = -3$$

$$\lambda = 3$$

Γ2. Για $\lambda = 3$:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$\Gamma 3. f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0$$

Άρα $x = 0$ ή $x = 2$.

Ο πίνακας μονοτονίας της f είναι:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	↗		↘	↗

Μονοτονία:

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και στο $[2, +\infty)$, και γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = 0$, το $f(0) = 2$ και τοπικό ελάχιστο για $x = 2$, το $f(2) = -2$.

$$\Gamma 4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) + 3}{f''(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 6x + 3}{6x - 6} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x^2 - 2x + 1)}{6(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2}{2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{2} = 0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$f'(x) = 20(x^2 + 4x + 5)^{19}(x^2 + 4x + 5)'$$

$$f'(x) = 20(x^2 + 4x + 5)^{19}(2x + 4)$$

$$f'(x) = 20(x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot 2(x + 2)$$

$$f'(x) = 40(x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot (x + 2)$$

$$\Delta 2. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h} = f'(-2) = 40((-2)^2 + 4(-2) + 5)^{19} \cdot (-2 + 2) = 40 \cdot 1^{19} \cdot 0 = 0$$

Δ3. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, άρα έχει κλίση $\lambda = 0$.

$$f'(x_0) = 0$$

$$40(x_0^2 + 4x_0 + 5)^{19} \cdot (x_0 + 2) = 0$$

$$(x_0^2 + 4x_0 + 5)^{19} = 0 \quad \text{ή} \quad x_0 + 2 = 0$$

Το τριώνυμο $x_0^2 + 4x_0 + 5$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -4 < 0$, άρα δε μηδενίζεται.

Επομένως, η μοναδική ρίζα της παραγώγου είναι $x_0 = -2$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(-2, f(-2))$ είναι $y = \lambda x + \beta$.

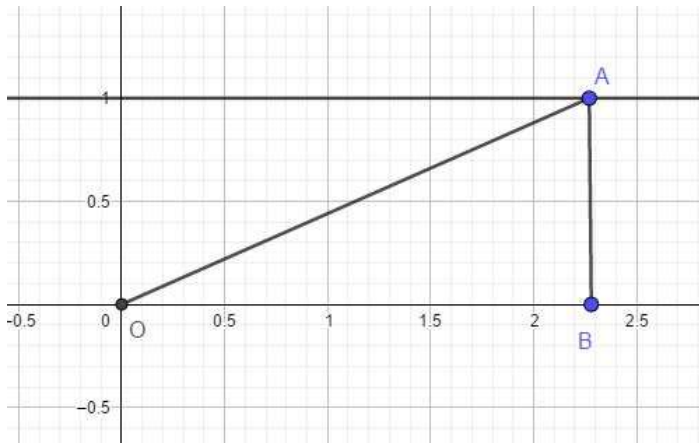
$$y_0 = f(-2) = ((-2)^2 + 4(-2) + 5)^{20} = 1^{20} = 1$$

Το σημείο $(-2, f(-2))$ ανήκει στην $y = \lambda x + \beta$ άρα

$$1 = 0 \cdot (-2) + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$$

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση είναι η $y = 0x + 1$, άρα η $y = 1$.

Δ4. Θεωρούμε σημείο $B(x, 0)$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο OAB, έχουμε:

$$OA^2 = OB^2 + AB^2$$

$$OA^2 = x^2 + 1^2$$

$$OA = \sqrt{x^2 + 1}$$

Η συνάρτηση που εκφράζει την απόσταση OA είναι η $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

$$\text{Ισχύει } g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} (x^2 + 1)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\text{Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης OA για } x = 1 \text{ είναι } g'(1) = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Θέμα θεωρίας χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία. Ως συνήθως, οι ερωτήσεις Σωστού-Λάθους απαιτούσαν προσοχή.

ΘΕΜΑ Β

Απλή άσκηση Στατιστικής με κατανοητά ερωτήματα.

ΘΕΜΑ Γ

Εξετάζονται βασικές εφαρμογές του Διαφορικού Λογισμού.

ΘΕΜΑ Δ

Πιο απαιτητικό θέμα του Διαφορικού Λογισμού με ενδιαφέροντα ερωτήματα. Ιδιαίτερη προσοχή απαιτούσαν η εκφώνηση του ερωτήματος Δ2 και το ερώτημα Δ4.

ΓΕΝΙΚΑ

Τα θέματα συνολικά κρίνονται λιγότερα απαιτητικά σε σχέση με τα περσινά θέματα.

Τα θέματα Α, Β και Γ κρίνονται ως θέματα μη αυξημένης δυσκολίας, ενώ το θέμα Δ αποτελείται από πιο απαιτητικά ερωτήματα.

Ωστόσο, στο «Άριστα» θα μπορούσε να οδηγηθεί μόνο ο άρτια προετοιμασμένος υποψήφιος.

Στο φροντιστήριό μας θέματα ανάλογης δυσκολίας και φιλοσοφίας είχαν υπερτονιστεί τόσο κατά τη διδασκαλία, όσο και στη διεξαγωγή των διαγωνισμάτων.

Επιμέλεια

Φανή Αθανασοπούλου

Γιάννης Καζιακούρας